Les équations de Lagrange : le pendule simple

Janvier 2024

Damien Rifflart & Eliott Arnold

1 Introduction

On cherche l'équation du mouvement d'un pendule simple en utilisant les équations *d'Euler-Lagrange*.

1.1 Lagrangien et équations de Lagrange

Fonction de Lagrange ou lagrangien: c'est une fonction des coordonnées généralisées q_α, des vitesses généralisées $\dot{q}_\alpha$ et du temps t qui permet de décrire la dynamique d'un système. Elle est définie par:

$$\boxed{L(q,\dot{q},t) \overset{\text{def}}{=} T(q,\dot{q},t) - V(q,t),} \tag{1}$$

Cette équation traduit la différence de l'énergie cinétique T et de l'énergie potentielle V.
Equations de Lagrange: ce sont les équations du mouvement du système dans le cadre de la mécanique de Lagrange. Pour un système à n degrés de liberté, décrit par un lagrangien $L(q,\dot{q},t)$, ces équations forment un ensemble de n équations différentielles du second ordre donné par:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1,\dots,n)} \tag{2}$$

2 Lagrangien et équations de Lagrange

2.1 Calcul du Lagrangien

L'énergie cinétique d'un corps est définie par l'équation :

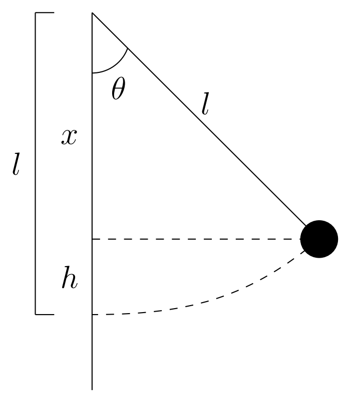
$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

Dans le cas d'un pendule simple, le mouvement du pendule peut être modélisé comme un mouvement circulaire, où la longueur l du pendule correspond au rayon de ce cercle. Lorsque le pendule se déplace, la vitesse v d'un point sur le pendule (par exemple, la masse au bout) est proportionnelle à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ (c'est-à-dire la variation de l'angle avec le temps) et à la distance l (rayon du cercle), ce qui donne la relation $v = l \cdot \dot{\theta}$.

Par conséquent, en substituant $v = l \cdot \dot{\theta}$ dans T, nous trouvons la relation suivante :

$$T = \frac{1}{2}m(l \cdot \dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

De plus, l'énergie potentielle est liée à la masse du pendule, à la constante gravitationnelle ainsi qu'à la hauteur du pendule. Par l'utilisation de la trigonométrie, nous trouvons que:



$$\begin{aligned} &h = l - x \\ &x = \cos\theta \cdot l \\ &\implies h = l - (\cos\theta \cdot l) \\ &\implies h = l(1 - \cos\theta) \end{aligned}$$

Comme $V = mgh$:

$$V = mgl \cdot (1 - \cos\theta)$$

Par conséquent, comme $L = T - V$:

$$\boxed{L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl \cdot (1 - \cos\theta)} \tag{3}$$

2.2 Calcul des équations de Lagrange

Nous utilisons l'équation de Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0$$

Nous calculons la première dérivée partielle :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \dot\theta}(\frac{1}{2}ml^2\dot\theta^2 - mgl\cdot(1-\cos\theta)) &= \frac{d}{d\dot\theta}(\frac{1}{2}ml^2\dot\theta^2)\\ &= \frac{1}{2}ml^2 2\dot\theta\\ &= ml^2\dot\theta\end{aligned}$$

Ensuite, nous continuons en dérivant $\frac{\partial}{\partial\dot\theta}$ par rapport aux temps :

$$\frac{d}{dt}(ml^2\dot\theta) = ml^2\ddot\theta$$

Nous devons également calculer la deuxième dérivée:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial\theta}(\frac{1}{2}ml^2\dot\theta^2 - mgl\cdot(1-\cos\theta)) &= \frac{d}{d\theta}(-mgl\cdot(1-\cos\theta))\\ &= -mgl\cdot\frac{d}{d\theta}(1-\cos\theta)\\ &= -mgl\cdot(0-(-\sin\theta))\\ &= -mgl\sin\theta\end{aligned}$$

Cela nous donne l'équation finale:

$$\begin{aligned} & ml^2\ddot\theta - mgl\sin\theta = 0\\ \Leftrightarrow\quad & l^2\ddot\theta - gl\sin\theta = 0\\ \Leftrightarrow\quad & \boxed{l\ddot\theta - g\sin\theta = 0}\end{aligned} \tag{4}$$

3 Interprétation

Nous avons trouvé l'équation du mouvement du pendule

$$\boxed{l\ddot\theta - g\sin\theta = 0} \tag{5}$$

où l correspond à la longueur du fil, $\ddot\theta$ à l'accélération angulaire du pendule, g à l'accélération due à la gravité (9,81 m$\cdot$s^{-2}) et $\sin\theta$ au sinus de l'angle.

3.1 Accélération selon l'angle theta

a) Quand $\theta > 0$ (pendule à droite de la verticale) :

$$\sin\theta > 0, \quad \text{donc} \quad -g\sin\theta < 0$$

Cela implique que $\ddot{\theta} < 0$, provoquant une accélération vers la gauche.

b) Quand $\theta < 0$ (pendule à gauche de la verticale) :

$$\sin\theta < 0, \quad \text{donc} \quad -g\sin\theta > 0$$

Cela implique que $\ddot{\theta} > 0$, provoquant une accélération vers la droite.

c) Quand $\theta = 0$ (pendule à la verticale) :

$$\sin\theta = 0, \quad \text{donc} \quad \ddot{\theta} = 0$$

Le pendule n'a pas d'accélération à ce point, mais cela n'implique pas que sa vitesse est nulle.
On remarque que lorsque le pendule est d'un côté ou de l'autre de la verticale, la force gravitationnelle tend à le ramener vers sa position d'équilibre (le centre).