Calcul du nombre de rebonds

Octobre 2024

Damien Rifflart

1 Introduction

On cherche à déterminer le nombre de rebonds qu'un objet fera en le lâchant sans lui donner une vitesse initiale.

1.1 Éléments négligés et référentiel utilisé

On néglige les éléments suivants, ainsi que d'autres non susceptibles de changer le résultat de manière significative :

- frottements de l'air,
- poussée d'Archimède,
- variation de pression atmosphérique,

On se place dans un référentiel galiléen, où l'objet est considéré comme soumis uniquement à la gravité, muni un repère cartésien.

1.2 Lagrangien et équations de Lagrange

Fonction de Lagrange ou lagrangien: c'est une fonction des coordonnées généralisées q_α, des vitesses généralisées $\dot{q}_\alpha$ et du temps t qui permet de décrire la dynamique d'un système. Elle est définie par:

$$\boxed{L(q,\dot{q},t) \overset{\text{def}}{=} T(q,\dot{q},t) - V(q,t),} \tag{1}$$

Cette équation traduit la différence de l'énergie cinétique T et de l'énergie potentielle V.
Equations de Lagrange: ce sont les équations du mouvement du système dans le cadre de la mécanique de Lagrange. Pour un système à n degrés de liberté, décrit par un lagrangien $L(q,\dot{q},t)$, ces équations forment un ensemble de n équations différentielles du second ordre donné par:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, n)} \tag{2}$$

2 Lagrangien et équations de Lagrange

2.1 Calcul du Lagrangien

L'énergie cinétique d'un corps est définie par l'équation :

$$T = \frac{1}{2}m\vec{v}^2$$

Dans le cas d'un objet lancé, la vitesse de l'objet est égale à la variation de la hauteur: $\vec{v} = \dot{z}$
Par conséquent, en substituant $\vec{v} = \dot{z}$ dans T, nous trouvons la relation suivante :

$$T = \frac{1}{2}m\dot{z}^2$$

De plus, l'énergie potentielle est liée à la masse de l'objet, à la constante gravitationnelle ainsi qu'à la hauteur à laquelle on lâche l'objet. On trouve que:

$$V = mgz_0$$

Par conséquent, comme $L = T - V$:

$$\boxed{L = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 - mgz_0} \tag{3}$$

2.2 Calcul des équations de Lagrange

Nous utilisons l'équation de Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0$$

Nous calculons la première dérivée partielle :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \dot{z}}(\frac{1}{2}m\dot{z}^2 - m\vec{g}z_0) &= \frac{d}{d\dot{z}}(\frac{1}{2}m\dot{z}^2) \\ &= \frac{1}{2}m \cdot 2\dot{z} \\ &= m\dot{z}\end{aligned}$$

Ensuite, nous continuons en dérivant $\frac{\partial}{\partial \dot{z}}$ par rapport aux temps :

$$\frac{d}{dt}(m\dot{z}) = m\ddot{z}$$

Nous devons également calculer la deuxième dérivée partielle:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial z_0}(\frac{1}{2}m\dot{z}^2 - m\vec{g}z_0) &= \frac{d}{dz_0}(-m\vec{g}z_0)\\ &= -m\vec{g}\end{aligned}$$

Cela nous donne l'équation finale:

$$\begin{aligned} m\ddot{z} &= -m\vec{g} \\ \Leftrightarrow \quad &\boxed{\ddot{z} = -\vec{g}}\end{aligned} \tag{4}$$

Cette relation mathématique traduit que l'accélération ($\ddot{z}$) est égale à $-\vec{g}$, la constante gravitationnelle. Le signe négatif est le fruit d'une convention, il montre que le vecteur est dirigé vers le bas.

3 Énergie cinétique après un rebond

3.1 Vitesse restante après un rebond

On cherche à calculer l'énergie cinétique restante après un rebond. Pour ce faire, il faut déterminer la vitesse après un rebond.
On pose la variable e, un coefficient de restitution strictement inférieur à 1. Une fois le coefficient multiplié par la vitesse avant le rebond $\vec{v_0}$, il donne la vitesse après le rebond v_1.
Par exemple, si $e = 0.6$, l'objet perdra 60% de sa vitesse après un rebond.

$$\vec{v_1} = e \cdot \vec{v_0}$$

3.2 Relation avec l'énergie cinétique

$$\begin{aligned} T_1 = \frac{1}{2}m\vec{v_1}^2 &= \frac{1}{2}m \cdot (e \cdot \vec{v_0})^2 \\ &= \frac{1}{2}m \cdot e^2 \cdot \vec{v_0}^2 \end{aligned}$$

Or $T_0 = \frac{1}{2}m \cdot \vec{v_0}^2$, donc:

$$\boxed{T_1 = e^2 \cdot T_0} \tag{5}$$

On a trouvé que l'énergie cinétique après un rebond, est égal à l'énergie cinétique avant multipliée par le coefficient e au carré.

4 Hauteur après un rebond

4.1 Principe de conservation de l'énergie mécanique

Avant d'analyser le rebond, rappelons le principe de conservation de l'énergie mécanique. Dans un système sans frottement, l'énergie mécanique totale (E) est conservée :

$$E = \text{Énergie potentielle (V)} + \text{Énergie cinétique (T)} = \text{constante}$$

Pour un objet en chute libre :

- V $= mgz$, où m est la masse, g l'accélération due à la gravité, et z la hauteur
- T $= \frac{1}{2}mv^2$, où v est la vitesse

4.2 Mouvement avant le rebond

4.2.1 Au point de départ (hauteur initiale $z_{initiale}$)

- $\mathrm{V}_{initiale} = mgz_{initiale}$
- $\mathrm{T}_{initiale} = 0$ (l'objet est lâché sans vitesse initiale)
- $E_{initiale} = mgz_{initiale}$

4.2.2 Juste avant l'impact avec le sol (hauteur z_0

- $V_0 = \mathrm{mg} \cdot 0 \ (z_0 = 0) = 0$
- $T_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$
- $E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$ (conservation de l'énergie)

On peut donc écrire : $mgz_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$ Ce qui nous donne : $v_0 = \sqrt{2gz_0}$

4.3 Analyse du rebond

Lors du rebond, une partie de l'énergie est perdue. Cette perte est caractérisée par le coefficient de restitution e.

La vitesse juste après le rebond (v_1) est liée à la vitesse juste avant le rebond ($_0$) par la relation :

$$v_1 = e \cdot v_0$$

4.4 Mouvement après le rebond

4.4.1 Juste après le rebond

- $\mathrm{V}_1 = mgz_0 = 0$
- $\mathrm{T}_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}m(e \cdot v_0)^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 \cdot e^2 = mgz_0 \cdot e^2$

4.4.2 Au sommet de la trajectoire après le premier rebond (hauteur z_{max})

Toute l'énergie cinétique est convertie en énergie potentielle :

- $V_{max} = mgz_{max}$
- $T_{max} = 0$
- $E_{max} = mgz_{max} = mgz_0 \cdot e^2$ (conservation de l'énergie)

  On en déduit : $z_{max} = z_0 \cdot e^2$

4.5 Généralisation à n rebonds

En appliquant le même raisonnement pour chaque rebond, on obtient la hauteur max après n rebonds:

- Après le 2ème rebond : $z_{max} = z_1 \cdot e^2 = (z_0 \cdot e^2) \cdot e^2 = z_0 \cdot e^4$
- Après le 3ème rebond : $z_{max} = z_2 \cdot e^2 = ((z_0 \cdot e^2) \cdot e^2) \cdot e^2 = z_0 \cdot e^6$

  On peut donc généraliser pour n rebonds :

$$\boxed{z_n = z_0 \cdot e^{2n}} \tag{6}$$

5 Calcul du nombre de rebonds

On ne compte plus un rebond quand sa hauteur maximale est inférieur à z_{min}.

$$\begin{aligned}
z_n < z_{min} &\iff z_0 \cdot e^{2n} < z_{min} \\
&\iff e^{2n} < \frac{z_{min}}{z_0} \\
&\iff \ln e^{2n} < \ln \frac{z_{min}}{z_0} \\
&\iff 2n \cdot \ln e < \ln \frac{z_{min}}{z_0} \\
&\iff n < \frac{\ln \frac{z_{min}}{z_0}}{2 \ln e}
\end{aligned}$$

On peut donc déterminer le nombre de rebonds maximal d'un objet avant que sa hauteur maximale soit inférieure à une hauteur minimale z_{min}. Pour donner un intervalle précis, on définie également *nmin* en soustrayant 1 à *nmax*.

$$\boxed{n \ \frac{\ln \frac{z_{min}}{z_0}}{2 \ln e}} \tag{7}$$