Calcul de l'angle de lancer optimal

Septembre 2024

Damien Rifflart

---

1 Introduction

On cherche à déterminer l'angle en degrés pour lequel un objet touche le sol à une distance maximale par rapport à l'origine.

1.1 Éléments négligés et référentiel utilisé

On néglige les éléments suivants, ainsi que d'autres non susceptibles de changer le résultat de manière significative :

- frottements de l'air,
- poussée d'Archimède,
- variation de pression atmosphérique,
- effets relativistes,
- uniformité du champ gravitationnel.

On se place dans un référentiel galiléen, où l'on peut appliquer les lois de Newton, muni un repère cartésien.
Dans un référentiel galiléen, l'objet est considéré comme soumis uniquement à la gravité, ce qui simplifiera les calculs.

2 Équation de la trajectoire

Le but est d'obtenir x par rapport à alpha (l'angle de lancer), afin de trouver le maximum global pour trouver la plus grande valeur de alpha. Nous savons que:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{x}$$

2.1 Définition de l'accélération

La deuxième loi de Newton stipule qu'une force résultante exercée sur un objet est toujours égale au produit de la masse de cet objet par son accélération. De plus, l'accélération produite et la force résultante ont la même orientation.
Cela peut être exprimé mathématiquement par l'équation suivante :

$$\boxed{\sum \vec{F_{ext}} = m\vec{a}} \tag{1}$$

Ici, comme nous négligeons les forces extérieures telles que le frottement de l'air, la seule force qui agit sur l'objet est la force gravitationnelle. Cette force est appelée *poids*.

Le poids d'un objet est la force exercée sur lui par la gravité. Il est donné par la formule suivante :

$$\boxed{\vec{P} = m\vec{g}} \tag{2}$$

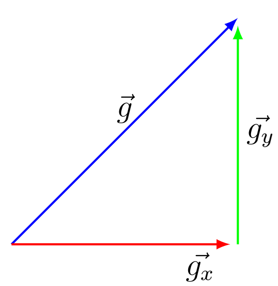
où:
- $\vec{P}$ est le poids, mesuré en Newtons (N),
- m est la masse de l'objet, exprimée en kilogrammes (kg),
- $\vec{g}$ est l'accélération due à la gravité, égale à $9{,}81\,\mathrm{m/s}^2$ en moyenne sur Terre. Cette valeur change légèrement en fonction de la latitude et de l'altitude.

Le poids est donc représenté comme un vecteur qui est toujours dirigé vers le centre de la Terre, et sa grandeur dépend de la masse de l'objet ainsi que de la gravité de la planète où se trouve l'objet.

Ici, la seule accélération de l'objet est uniquement due à la gravité.
En conséquence, l'accélération $\vec{a}$ dans la deuxième loi de Newton correspond à l'accélération gravitationnelle $\vec{g}$.

$$\vec{P} = m\vec{g} = m\vec{a} \Longleftrightarrow \vec{a} = \vec{g}$$

On peut projeter $\vec{g}$ sur les axes x et y, pour obtenir les deux vecteurs respectifs.



Un vecteur peut être décomposé en deux vecteurs, qu'on appellera $\vec{g_x}$ et $\vec{g_y}$.

Dans le cas du vecteur $\vec{g}$, le vecteur $\vec{g_x}$ est nul puisque la force gravitationnelle agit toujours verticalement vers le bas, en direction du centre de la Terre. En revanche, le vecteur $\vec{g_y}$ est égal à -g ; le signe négatif est simplement le fruit d'une convention, il permet d'indiquer que le vecteur pointe dans la direction opposée à celle de l'axe y positif.

$$\boxed{\vec{a}(t)\left|\begin{array}{l}\vec{a}_x(t)=0\\ \\ \vec{a}_y(t)=-g\end{array}\right.} \tag{3}$$

2.2 Définition de la vitesse

Comme l'accélération est définie comme la dérivée de la vitesse, on doit réaliser l'opération inverse (l'intégration) pour retrouver la vitesse.

$$\int_0^t \vec{a}(t)dt = \vec{v}(t) - \vec{v}_0$$
$$\Longrightarrow \vec{v}(t) = \int_0^t \vec{a}(t)dt + \vec{v}_0$$

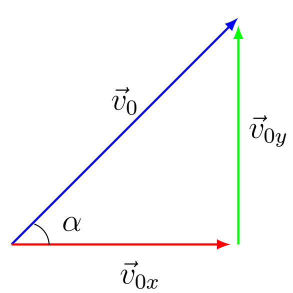
On peut également projeter le vecteur vitesse sur ses deux composantes:

$$\vec{v}\left|\begin{array}{l}\vec{v}_x=\int_0^t \vec{a}_x(t)dt+\vec{v}_{0x}\\ \\ \vec{v}_y=\int_0^t \vec{a}_y(t)dt+\vec{v}_{0y}\end{array}\right.$$

On substitue $\vec{a}_x(t)=0$ et $\vec{a}_y=-g$:

$$\vec{v}\left|\begin{array}{l}\vec{v}_x=\int_0^t 0dt+v_{0x}=\vec{v}_{0x}\\ \\ \vec{v}_y=\int_0^t -\vec{g}dt+v_{0y}=-\vec{g}t+\vec{v}_{0y}\end{array}\right.$$

Nous pouvons déterminer les valeurs de $\vec{v}_{0x}$ et de $\vec{v}_{0y}$ grâce à la trigonométrie.



$$\cos\alpha = \frac{\vec{v}_{0x}}{\vec{v}_0} \Longleftrightarrow \vec{v}_{0x} = \vec{v}_0 \cdot \cos\alpha$$
$$\sin\alpha = \frac{\vec{v}_{0y}}{\vec{v}_0} \Longleftrightarrow \vec{v}_{0y} = \vec{v}_0 \cdot \sin\alpha$$

$$\boxed{\vec{v}(t)\left|\begin{array}{l}\vec{v}_x(t)=\vec{v}_0\cos\alpha\\ \\ \vec{v}_y(t)=-\vec{g}t+\vec{v}_0\sin\alpha\end{array}\right.} \tag{4}$$

2.3 Définition de la position

Pour obtenir la position, il faut à nouveau intégrer la vitesse.
On définie O comme le point à partir duquel on lance l'objet et M le point où se trouve l'objet au temps t.

$$\int_0^t \vec{v}(t)dt = \overrightarrow{OM}(t) - \overrightarrow{OM}_0$$
$$\Longrightarrow \overrightarrow{OM}(t) = \int_0^t \vec{v}(t)dt + \overrightarrow{OM}_0$$

Or, on connaît $\overrightarrow{OM}_0$. Comme on lance au point (0,0), $\overrightarrow{OM}_0 = (0{,}0)$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{OM}(t) = \int_0^t \vec{v}(t)dt$$

On peut également projeter le vecteur OM sur ses deux composantes:

$$\overrightarrow{OM} \left| \begin{array}{l} \overrightarrow{OM}_x = \int_0^t \vec{v}_x(t)dt = \int_0^t \vec{v}_0 \cos\alpha dt = \vec{v}_0 \cos\alpha \cdot t \\ \\ \overrightarrow{OM}_y = \int_0^t \vec{v}_y(t)dt = \int_0^t -\vec{g}t + \vec{v}_0 \sin\alpha dt \end{array} \right.$$

Nous pouvons simplifier davantage $\vec{OM}_y$,

$$\begin{aligned} \int_0^t -\vec{g}t + \vec{v}_0 \sin\alpha dt &= \int_0^t -\vec{g}tdt + \int_0^t \vec{v}_0 \sin\alpha dt \\ &= -\vec{g}\int_0^t t\,dt + \vec{v}_0 \sin\alpha \cdot t \\ &= -g\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^t + \vec{v}_0 \sin\alpha \cdot t \\ &= -g\left(\frac{t^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) + \vec{v}_0 \sin\alpha \cdot t \\ &= -g \cdot \frac{t^2}{2} + \vec{v}_0 \sin\alpha \cdot t \\ &= -\frac{1}{2}gt^2 + \vec{v}_0 \sin\alpha \cdot t \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{OM}(t) \left| \begin{array}{l} \overrightarrow{OM}_x(t) = \vec{v}_0 \cos\alpha \cdot t \\ \\ \overrightarrow{OM}_y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + \vec{v}_0 \sin\alpha \cdot t \end{array} \right.$$

On peut encore développer l'expression en recherchant t, pour le substituer.

$$\overrightarrow{OM}_x(t) = \vec{v}_0 \cos\alpha \cdot t \Longleftrightarrow t = \frac{\overrightarrow{OM}_x(t)}{\vec{v}_0 \cos\alpha}$$

On substitue t dans $\overrightarrow{OM}_x(t)$ et $\overrightarrow{OM}_y(t)$:

$$\overrightarrow{OM}(t) \left| \begin{array}{l} \overrightarrow{OM}_x(t) = \vec{v}_0 \cos\alpha \cdot \frac{\overrightarrow{OM}_x(t)}{\vec{v}_0 \cos\alpha} \\ \\ \overrightarrow{OM}_y(t) = -\frac{1}{2}g(\frac{\overrightarrow{OM}_x(t)}{\vec{v}_0 \cos\alpha})^2 + \vec{v}_0 \sin\alpha \cdot \frac{\overrightarrow{OM}_x(t)}{\vec{v}_0 \cos\alpha} \end{array} \right.$$

En développant $\overrightarrow{OM}_y(t)$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM}_y(t) &= -\frac{1}{2}g\left(\frac{\overrightarrow{OM}_x(t)}{\vec{v}_0 \cos\alpha}\right)^2 + \vec{v}_0 \sin\alpha \cdot \frac{\overrightarrow{OM}_x(t)}{\vec{v}_0 \cos\alpha} \\ &= -\frac{1}{2}g \cdot \frac{\overrightarrow{OM}_x(t)^2}{(\vec{v}_0)^2 \cos^2\alpha} + \frac{\vec{v}_0 \sin\alpha \cdot \overrightarrow{OM}_x(t)}{\vec{v}_0 \cos\alpha} \\ &= -\frac{\overrightarrow{OM}_x(t)^2 \cdot g}{2 \cdot (\vec{v}_0)^2 \cos^2\alpha} + \frac{\sin\alpha \cdot \overrightarrow{OM}_x(t)}{\cos\alpha} \\ &= -\frac{g}{2 \cdot (\vec{v}_0)^2 \cos^2\alpha} \cdot \overrightarrow{OM}_x(t)^2 + \tan\alpha \cdot \overrightarrow{OM}_x(t) \\ &= \overrightarrow{OM}_x(t)\left(-\frac{g}{2 \cdot (\vec{v}_0)^2 \cos^2\alpha} \cdot \overrightarrow{OM}_x(t) + \tan\alpha\right) \end{aligned}$$

On obtient finalement notre équation de la trajectoire:

$$\boxed{\overrightarrow{OM}(t) \left| \begin{array}{l} \overrightarrow{OM}_x(t) = \vec{v}_0 \cos\alpha \cdot \frac{\overrightarrow{OM}_x(t)}{\vec{v}_0 \cos\alpha} \\ \\ \overrightarrow{OM}_y(t) = \overrightarrow{OM}_x(t)\left(-\frac{g}{2 \cdot (\vec{v}_0)^2 \cos^2\alpha} \cdot \overrightarrow{OM}_x(t) + \tan\alpha\right) \end{array} \right.} \tag{5}$$

3 Déterminer l'angle optimal

3.1 Déterminer $\overrightarrow{OM}_x(\alpha)$

Lorsque l'objet retombe sur le sol, $\overrightarrow{OM}_y(t) = 0$.

$$\overrightarrow{OM}_y(t) = \overrightarrow{OM}_x(t)\left(-\frac{g}{2\cdot(\vec{v}_0)^2\cos^2\alpha}\cdot\overrightarrow{OM}_x(t) + \tan\alpha\right) = 0$$
$$\Longrightarrow \overrightarrow{OM}_x(t)\left(-\frac{g}{2\cdot(\vec{v}_0)^2\cos^2\alpha}\cdot\overrightarrow{OM}_x(t) + \tan\alpha\right) = 0$$

Si $a \cdot b = 0$, $a = 0$ ou $b = 0$.

$$\overrightarrow{OM}_x(t) = 0$$

ou

$$-\tfrac{g}{2\cdot(\vec{v}_0)^2\cos^2\alpha}\cdot\overrightarrow{OM}_x(t) + \tan\alpha = 0$$

Ici, on ne s'intéresse pas à $\overrightarrow{OM}_x(t) = 0$ car si la distance entre le point de lancer et la position de l'objet est nulle, l'objet n'a pas encore été lancé ; par conséquent, sa hauteur est nulle.
On s'intéresse uniquement à la deuxième expression, à partir de laquelle on peut déterminer $\overrightarrow{OM}(\alpha)$.

$$-\frac{g}{2\cdot(\vec{v}_0)^2\cos^2\alpha}\cdot\overrightarrow{OM}_x(\alpha) + \tan\alpha = 0$$
$$\Longleftrightarrow -\frac{g}{2\cdot(\vec{v}_0)^2\cos^2\alpha}\cdot\overrightarrow{OM}_x(\alpha) = -\tan\alpha$$
$$\Longleftrightarrow \overrightarrow{OM}_x(\alpha) = -\tan\alpha\cdot -\frac{2\cdot(\vec{v}_0)^2\cos^2\alpha}{g}$$
$$\Longleftrightarrow \overrightarrow{OM}_x(\alpha) = \frac{\tan\alpha\cdot 2\cdot(\vec{v}_0)^2\cos^2\alpha}{g}$$
$$\Longleftrightarrow \overrightarrow{OM}_x(\alpha) = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot 2\cdot(\vec{v}_0)^2\cos^2\alpha}{g}$$
$$\Longleftrightarrow \overrightarrow{OM}_x(\alpha) = \frac{2\cdot(\vec{v}_0)^2}{g}\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\Longleftrightarrow \overrightarrow{OM}_x(\alpha) = \frac{2\cdot(\vec{v}_0)^2}{g}\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\Longleftrightarrow \overrightarrow{OM}_x(\alpha) = \frac{2\cdot(\vec{v}_0)^2}{g}\cdot\frac{\sin 2\alpha}{2} = \frac{(\vec{v}_0)^2}{g}\cdot\sin 2\alpha$$

On obtient enfin la position x par rapport à l'angle alpha:

$$\boxed{\overrightarrow{OM}_x(\alpha) = \frac{(\vec{v}_0)^2}{g} \cdot \sin 2\alpha} \tag{6}$$

3.2 Recherche du maximum global

Afin de chercher la valeur de α pour laquelle $\overrightarrow{OM}_x$ est maximal, il faut chercher le maximum global de la fonction. Pour ce faire, on calcul la dérivée de $\overrightarrow{OM}_x$ et l'on cherche lorsqu'elle est nulle.
Pour ne pas complexifier davantage les calculs, on limite α entre l'intervalle $[0; \frac{\pi}{2}[$. Un angle en dessous de 0 degré correspond à tirer vers le bas, et un angle au dessus de 90 degrés ($\frac{\pi}{2}$ correspond à tirer juste au dessus de soi.

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha}(\overrightarrow{OM}_x(\alpha)) &= \frac{(\vec{v}_0)^2}{g} \cdot 2 \cdot \cos 2\alpha (\text{dérivée de } \sin 2\alpha = 2\cos 2\alpha) \\ &= \frac{2 \cdot (\vec{v}_0)^2}{g} \cdot \cos 2\alpha \end{aligned}$$

On cherche ensuite lorsque $\frac{2 \cdot (\vec{v}_0)^2}{g} \cdot \cos 2\alpha = 0$.
$\frac{2 \cdot (\vec{v}_0)^2}{g}$ ne peut pas être égal à 0 puisque on lance l'objet avec une vitesse non nulle. On est donc amené à résoudre l'équation:

$$\cos 2\alpha = 0 \iff 2\alpha = \frac{\pi}{2} \iff \alpha = \frac{\pi}{4}$$

On obtient un résultat en radiant, qu'il faut convertir en degrés grâce à cette formule:

$$x^\circ = \frac{x \cdot 180}{\pi}$$

$$\frac{\frac{\pi}{4} \cdot 180}{\pi} = \frac{180}{4} = 45^\circ$$

L'angle optimal pour lancer un objet, en ignorant les frottements de l'air et les autres éléments peu significatifs est de 45°.
Ce résultat est vrai dans une situation idéalisée où la résistance de l'air est négligée. Dans des conditions réelles, cet angle pourrait être plus bas en raison des forces de frottement.